Zully - Queffelec
p 337

Transformée de la Gaussienne et inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème : 1) Soit $a>0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ax^2}$ alors $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

2) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve : 1) On a $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} dx$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-ax^2} dx$.

Comme : $*$ $z \mapsto e^{zx}$ est holomorphe $\forall x \in \mathbb{R}$.

$*$ $x \mapsto e^{zx} e^{-ax^2}$ est continue $\forall z \in \mathbb{C}$.

$*$ Soit K compact de $\mathbb{C}$, alors $\exists R>0$, $K \subset B(0,R)$

Si $z \in K$ alors $|e^{zx-ax^2}| = e^{x\mathrm{Re}(z) - ax^2}$ et

$$\begin{cases} \text{Si } |x| \geq \frac{2R}{a}, & x\mathrm{Re}(z) - ax^2 \leq |x\mathrm{Re}(z)| - a|x|^2 \leq -\frac{a}{2}|x|^2 \\ \text{Si } |x| \leq \frac{2R}{a}, & x\mathrm{Re}(z) - ax^2 \leq |x\mathrm{Re}(z)| - a|x|^2 \leq \frac{2R^2}{a} \end{cases}$$

On note alors $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}|x|^2} & \text{si } |x| \geq \frac{2R}{a} \\ e^{\frac{2R^2}{a}} & \text{si } |x| \leq \frac{2R}{a} \end{cases}$ $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et est indépendante de z et $|e^{xz-ax^2}| \leq g(x)$.

Donc par le Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

On intègre alors pour $z \in \mathbb{R}$: $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-ax^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x - \frac{z}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{z^2}{4a}} dx$

$$= \frac{e^{\frac{z^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \quad \text{où } y = \left(\sqrt{a}x - \frac{z}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{z^2}{4a}}$$

Comme $G : z \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{z^2}{4a}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et F aussi. Alors comme $F = G$ sur $\mathbb{R}$, par le principe du prolongement analytique, $F = G$ sur $\mathbb{C}$. Donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{z^2}{4a}}$.

En particulier, $\hat{f}(\xi) = F(-i\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$

2) Soit $\varepsilon > 0$, par application du Théorème de convergence dominée, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\varepsilon\xi^2} f(\xi)\,d\xi$$

En effet, $|e^{i\xi x}e^{-\varepsilon\xi^2}\hat{f}(\xi)| \le |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ car $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})$

Alors $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}e^{-\varepsilon\xi^2}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x-\varepsilon\xi^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}f(y)\,dy\right)d\xi$

Par le Théorème de Fubini-Tonelli (Fubini positif) :

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|e^{i\xi(x-y)}e^{-\varepsilon\xi^2}f(y)|\,dy\right)d\xi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\,d\xi}_{<+\infty \text{ intégrale de Gauss}}\ \underbrace{\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\,dy}_{<\infty \text{ car } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})} < \infty$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}|e^{i\xi(x-y)}e^{-\varepsilon\xi^2}f(y)|\,dy\otimes d\xi < \infty$$

Donc $e^{i\xi(x-y)}e^{-\varepsilon\xi^2}f(y)\in L^1$ de la mesure produit donc par Fubini, on intervertit les $\int$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x-\varepsilon\xi^2}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y-x)}e^{-\varepsilon\xi^2}\,d\xi\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} f(x+2\sqrt{\varepsilon}\,u)\,du \quad \text{en posant } y-x = 2\sqrt{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} f(x)\,du \quad \text{par CVD}$$

D'où $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du = f(x)$